

2009 年第一届初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

【参考答案】令 $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\frac{y}{x}=v$, 解得 $x=\frac{1-u^2}{v}, y=\frac{(1-u^2)(v-1)}{v}$

$$D_{uv} = \{(u, v) | 0 < u \leq 1, 1 \leq v < +\infty\}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2u}{v} & -\frac{1-u^2}{v^2} \\ -\frac{2u(v-1)}{v} & \frac{1-u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{2u(u^2-1)}{v^2}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{2u(1-u^2)}{v^2}, \quad \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} = \frac{(1-u^2)\ln v}{u},$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式，原积分也就等于

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy &= 2 \iint_{D_{uv}} (1-u^2)^2 \cdot \frac{\ln v}{v^2} du dv \\ &= 2 \int_0^1 (1-u^2)^2 du \int_1^{+\infty} \frac{\ln v}{v^2} dv = 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot 1 = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$ ，则 $f(x) =$ _____.

【参考答案】令 $A = \int_0^2 f(x) dx$, $f(x) = 3x^2 - 2 - A$

$$\int_0^2 (3x^2 - 2 - A) dx = \left[x^3 - 2x - Ax \right]_0^2 = 8 - 4 - 2A = 4 - 2A$$

所以 $A = 4 - 2A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$, 代入所设函数表达式，得

$$f(x) = 3x^2 - 2 - A = 3x^2 - 2 - \frac{4}{3} = 3x^2 - \frac{10}{3}.$$

(3) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是_____.

【参考答案】曲面在任意点 (x, y, z) 处的法向量可以取为 $\vec{n}_S = (f'_x, f'_y, -1) = (x, 2y, -1)$ 。平面 $\pi: 2x + 2y - z = 0$ 的法向量为 $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$ 。于切平面的法向量与平面 π 的法向量平行，

也就有

$$\vec{n}_S / \vec{n}_\pi = (x, 2y, -1) / (2, 2, -1)$$

所以 $\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{-1}{-1}$, 即 $\frac{x}{2} = y = 1$, 得 $x = 2, y = 1$,

$$z(2, 1) = \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 2 \right)_{(2,1)} = 2 + 1 - 2 = 1$$

因此, 所求的平面即为经过点 $(2, 1, 1)$, 法向量为 $\vec{n}_S = (2, 2, -1)$ 的平面, 于是有平面的点法式方程, 有 $2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 1) = 0$, 展开化简后有 $2x + 2y - z - 5 = 0$.

(4) 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

【参考答案】 对等式两端分别关于 x 求导数, $e^{f(y)} + xe^{f(y)} f'(y) y'(x) = e^y \cdot y'(x) \ln 29$. 因为 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$, 所以

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= [y'(x)]' = \left[\frac{e^{f(y)}}{e^y [1 - f'(y)] \ln 29} \right]'_x \\ &= \frac{\left(e^{f(y)} \right)' \cdot e^y [1 - f'(y)] - e^{f(y)} \cdot \left\{ e^y [1 - f'(y)] \right\}'_x}{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \\ &= \frac{\left\{ e^{f(y)} \cdot f'(y) \cdot y'(x) \cdot e^y [1 - f'(y)] - e^{f(y)} \cdot e^y y'(x) [1 - f'(y) - f''(y)] \right\}}{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \\ &= \frac{e^{f(y)} y'(x) \cdot \{ 2f'(y) - f''(y) - 1 + f''(y) \}}{e^y [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \end{aligned}$$

代入一阶导数表达式 $y'(x) = \frac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29}$, 有

$$y'' = \frac{e^{2f(y)} \{ 2f'(y) - f''(y) - 1 + f''(y) \}}{e^{2y} [1 - f'(y)]^3 \ln^2 29}$$

由原等式 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 可以推得 $\frac{e^{2f(y)}}{e^{2y} \ln^2 29} = \left(\frac{e^{f(y)}}{e^y \ln 29} \right)^2 = \frac{1}{x^2}$, 所以

$$y'' = \frac{2f'(y) - f'^2(y) - 1 + f''(y)}{x^2 [1 - f'(y)]^3} = \frac{-[1 - f'(y)]^2 + f''(y)}{x^2 [1 - f'(y)]^3}$$

第二题：(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

【参考答案】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)}$

由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \left[\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n \right]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx})}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \\ &= \frac{e(1 + 2 + \cdots + n)}{n} = \frac{n+1}{2} e \end{aligned}$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} = e^{\frac{n+1}{2} e}$.

第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

【参考答案】 由题设, 知 $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. 令 $u = xt$, 得 $g(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} (x \neq 0)$,

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} (x \neq 0)$$

由导数定义有 $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0) \end{aligned}$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

第四题：(15 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

【参考证法一】由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算。

$$\text{左边} = \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx,$$

$$\text{右边} = \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx,$$

$$\text{所以 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$\text{由于 } e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x,$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \frac{5}{2} \pi^2$$

【参考证法二】(1) 根据格林公式，有

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma$$

因为关于 $y = x$ 对称，所以

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma,$$

$$\text{故 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$(2) \text{ 由 } e^t + e^{-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2,$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\sigma \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

第五题：(10 分) 已知 $y_1 = x e^x + e^{2x}$, $y_2 = x e^x + e^{-x}$, $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

【参考解法】根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的知识，由题设可知： e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 $x e^x$ 是非齐次的一个特解。因此可以用下述两种解法。

【解法一】：故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$ 。将 $y = x e^x$ 代入上式，得

$$f(x) = (x e^x)'' - (x e^x)' - 2x e^x = 2e^x + x e^x - e^x - x e^x - 2x e^x = e^x - 2x e^x$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2x e^x$ 。

【解法二】故 $y = x e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}, \quad y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 2e^x + xe^x$$

消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

第六题：(10分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$ 。试确定 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

【参考答案】 因抛物线过原点，故 $c = 1$ ，由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \text{ 即 } b = \frac{2}{3}(1 - a),$$

$$\text{而 } V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1 - a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1 - a)^2 \right].$$

令 $\frac{dv}{da} = \pi \left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1 - a) \right] = 0$ ，得 $a = -\frac{5}{4}$ ，代入 b 的表达式得 $b = \frac{3}{2}$ 。
所以 $y \geq 0$ 。

$$\text{又因 } \frac{d^2v}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right] = \frac{4}{135}\pi > 0 \text{ 及实际情况, 当 } a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1$$

时，体积最小。

第七题：(15分) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$ (n 为正整数)，且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，

求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和。

【参考答案】 先解一阶常系数微分方程 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx} \left(\int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + c \right) = e^x \left(\frac{x^n}{n} + c \right)$$

由条件 $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，得 $c = 0$ ，故 $u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$ ，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

其收敛域为 $[-1, 1)$ ，当 $x \in (-1, 1)$ 时，有 $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ，故

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

当 $x = -1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1} \ln 2$ 。于是，当 $-1 \leq x < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x).$$

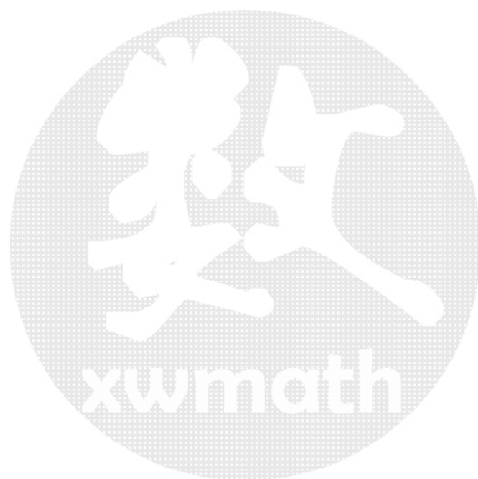
第八题：(10分)求 $x \rightarrow 1 -$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

【参考答案】 $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt,$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(t \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\right)^2} d\left(t \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}. \end{aligned}$$

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)