

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类) 试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 5 个小题, 每题 5 分, 共 25 分, 要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$$\begin{aligned} \text{【参考答案】 } x_n &= \frac{1}{(1-a)} (1-a)(1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \\ &= \frac{1}{(1-a)} (1-a^2) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \\ &= \frac{1}{(1-a)} (1-a^4) \cdot (1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \end{aligned}$$

由于 $|a| < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{【参考答案】 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^x \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \right] x \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] \right\} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

【注】 $\exp(x) = e^x$.

(3) 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx (n=1, 2, \cdots)$.

【参考答案】 因为 $s > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} x^n = 0$, 所以

$$I_n = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n d(e^{-sx}) = -\frac{1}{s} \left[x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} d(x^n) \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

由此得 $I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^{n-1}} I_1$.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x dx = -\frac{1}{s} \left[x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \right] = \frac{1}{s^2}$$

$$I_n = \frac{n!}{s^{n-1}} I_1 = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(4) 设 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【参考答案】因为 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2x^2 - y^2}{r^5} f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性, 可得

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^6} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2y^2 - x^2}{r^5} f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

【参考答案】直线 l_1 的对称式方程为 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$, 记两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{l}_2 = (4, -2, -1)$, 两直线上两定点分别为 $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(2, 1, 3)$, 并记

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, 1, 3), \quad \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (-1, 1, -6);$$

于是两点间的距离为 $d = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|} = \frac{|-2 + 1 - 18|}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}.$

第二题: (15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$. 证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根.

【参考证法】由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$. $f''(x) > 0$ 可

知 $y = f(x)$ 对应的图形为凹函数, 从而 $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ ($x > a$). 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$f(+\infty) + f'(a)(x - a) \rightarrow +\infty.$$

故存在 $b > a$, 使得 $f(b) > f(a) + f'(a)(b - a) > 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 必有一个充分大的 $c < x_0$, 使得 $f'(c) > 0$. $f''(x) > 0$ 可知 $y = f(x)$

为凹函数, 从而 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$ ($x < c$). 当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$$f(-\infty) + f'(c)(x - c) \rightarrow +\infty.$$

故存在 $d < c$, 使得 $f(d) > f(c) + f'(c)(d - c) > 0$.

在 $[x_0, b]$ 和 $[d, x_0]$ 利用零点定理, $\exists x_1 \in (x_0, b)$, $x_2 \in (d, x_0)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

下面证明方程 $y = f(x)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个实根, 不妨设为 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$. 对

$f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上分别用罗尔定理, 则各至少存在一点 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ 。再将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 则至少存在一点 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $f''(\eta) = 0$, 与已知条件 $f''(x) > 0$ 矛盾, 所以方程不能多于两个实根。

第三题: (15 分) 设 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定. 且 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$

具有二阶导数, 曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$ 。

【参考答案】 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2+2t} \frac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3} = \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 故

$$\frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)},$$

从而有 $(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2$, 即

$$\psi''(t) - \frac{1}{(1+t)}\psi'(t) = 3(1+t)$$

设 $u = \psi'(t)$, 故有 $u' - \frac{1}{(1+t)}u = 3(1+t)$, 由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式, 有

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \left(-\frac{1}{1+t}\right) dt} \left[\int 3(1+t)e^{\int \left(-\frac{1}{1+t}\right) dt} dt + C_1 \right] \\ &= (1+t) \left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1) \end{aligned}$$

由曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切知 $\psi(1) = \frac{3}{2e}, \psi'(1) = \frac{2}{e}$. 所以有

$$u|_{t=1} = \psi'(1) = \frac{2}{e} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e} - 3.$$

于是有

$$\psi(t) = \int (1+t)(3t + C_1) dt = t^3 + \frac{3+C_1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

$$\text{由 } \psi(1) = \frac{3}{2e} \Rightarrow C_2 = 2, \text{ 于是有 } \psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + \left(\frac{1}{e} - 3\right)t + 2 \quad (t > -1).$$

第四题: (15 分) 设 $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明: (1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛; (2) 当 $\alpha \leq 1$,

且 $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

【参考答案】 令 $f(x) = x^{1-\alpha}$, $x \in [S_{n-1}, S_n]$, 将 $f(x)$ 在 $[S_{n-1}, S_n]$ 上用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (S_{n-1}, S_n)$, 使得 $f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$, 即

$$S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n.$$

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^\alpha} \geq (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^\alpha}$, 显然 $\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$ 的前 n 项和有

界, 从而收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛.

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 因为 $a_n > 0$, S_n 单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n \rightarrow +\infty$ 对任意的 n , 当 $p \in \mathbb{N}$, $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$, 从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

(3) 当 $\alpha < 1$ 时, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$, 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

第五题: (15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{其中 } 0 < c < b < a, \text{ 密度为 } 1) \text{ 绕 } l \text{ 旋转.}$$

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

【参考答案】 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$, 椭球内任意点 $P(x, y, z)$ 的径向量为 \vec{r} , 则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{s})^2 = (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz) dV = 0,$$

其中 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ 而

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dz = \int_{-a}^a x^2 \cdot \pi ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4a^3 bc \pi}{15}.$$

或者使用换元法，有

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abc r^2 \sin \varphi dr = \frac{4a^3 bc \pi}{15}.$$

所以可得

$$\iiint_{\Omega} y^2 dV = \frac{4ab^3 c \pi}{15}, \quad \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{4abc^3 \pi}{15}.$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l = \iiint_{\Omega} d^2 dV = \frac{4abc \pi}{15} \left[(1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2 \right].$$

(2) 考虑函数 $V(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2$ 在约束条件 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 的约束条件下的条件极值。

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2 + \lambda (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

令 $L'_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\beta(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0$ ，解得极值点为

$$Q_1(\pm 1, 0, 0, a^2), Q_2(0, \pm 1, 0, b^2), Q_3(0, 0, \pm 1, c^2).$$

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，并且有 $I_{\max} = \frac{4abc \pi}{15} (a^2 + b^2)$ 。绕 x 轴（长轴）的转动

惯量最小，并且有 $I_{\min} = \frac{4abc \pi}{15} (b^2 + c^2)$ 。

第六题：(15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分

$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数。

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 。证明： $\oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0$ ；

(2) 求函数 $\varphi(x)$ ；(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$ 。

【参考答案】 设 $\oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = I$ ，将曲线 L 分割成两段 $L = L_1 + L_2$ 。设 L_0 不经过原点的

光滑曲线，使得 $L_0 \cup L_1^-$ 和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线。由已知条件可知 $L_0 \cup L_1^-$ 和 $L_0 \cup L_2$ 上曲线积分相等，有

$$\begin{aligned} \oint_{L_0 \cup L_1^-} \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} &= \oint_{L_0 \cup L_2} \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} \\ \Rightarrow \int_{L_2} + \int_{L_0} &= \int_{L_0} + \int_{L_1^-} \Rightarrow \int_{L_2} - \int_{L_1^-} = 0 \Rightarrow \int_{L_2 + L_1} = 0 \Rightarrow \oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 设 } P(x, y) = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q(x, y) = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}. \text{ 令 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 即}$$

$$\frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{\varphi'(x)(x^4 + y^2) - 4x^3\varphi(x)}{(x^4 + y^2)^2}.$$

解得 $\varphi(x) = -x^2$.

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4 + y^2 = 1$ 所围的闭区域, 则

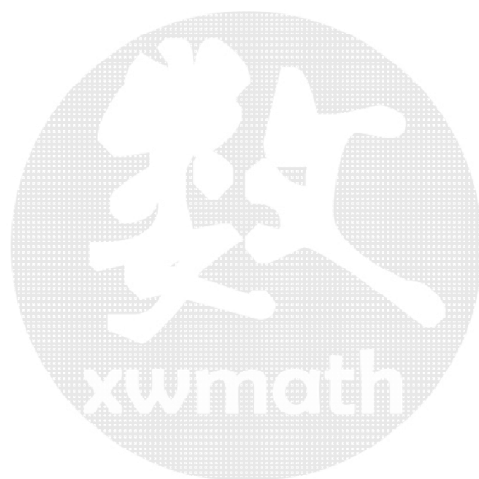
$$\oint_C \frac{2xy \, dx + \varphi(x) \, dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xy \, dx - x^2 \, dy}{x^4 + y^2}$$

利用格林公式, 有

$$\oint_{C_a} \frac{2xy \, dx - x^2 \, dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \iint_D (-4x) \, dx \, dy = 0.$$

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)