

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 4 个小题, 每题 6 分, 共 24 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$$

【参考解答】: 因为 $\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)}}{x} = e^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2} - 1}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2}{x}$$

$$= 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -e^2.$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = 0.$$

【注】可以考虑洛必达法则、带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 具体参见视频解析!

$$(2) \text{ 设 } a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

【参考解答】: 若 $\theta = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

若 $\theta \neq 0$, 则当 n 充分大, 使得 $0 < \left| \frac{\theta}{2^n} \right| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^2} \sin \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \end{aligned}$$

$$\text{从而有, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

$$(3) \text{ 求 } \iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy, \text{ 其中}$$

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

【参考解答】：设 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$,

$$D_2 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}, D_3 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\},$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} dx dy = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x} = 1 + 2 \ln 2, \quad \iint_{D_3} dx dy = 3 - 2 \ln 2,$$

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy - 1) dx dy = \iint_{D_3} dx dy - \iint_{D_1 \cup D_2} dx dy = 2 - 4 \ln 2.$$

【注】由积分的几何意义，积分等于 2 倍 D_3 矩形的面积减去矩形的面积。具体分析参见解析视频！

(4) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

【参考解答】：令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ ，定义区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。 $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，则

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2-x^2}.$$

$$\text{所以有 } S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{9}.$$

【注】一般思路参见解析视频！

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列， a, λ 为有限数，求证：

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ ；

2. 如果存在正整数 p ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$ 。

【参考证明】：1. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ， $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| \leq M$ ，且 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ ，

当 $n > N_1$ 时， $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。因为 $\exists N_2 > N_1$ ，当 $n > N_2$ 时， $\frac{N_1(M + |a|)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

于是

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| \leq \frac{N_1(M+|a|)\varepsilon}{n} + \frac{(n-N_1)\varepsilon}{n} < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

2. 对于 $i = 0, 1, \cdots, p-1$, 令 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$, 易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p} - a_n\}$ 的子列。由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda,$$

而 $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+i}}{n} = 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)p+i} \cdot \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m \in N, \exists n, p, i \in N, (0 \leq i \leq p-1)$, 使得 $m = np + i$, 且当 $m \rightarrow \infty$ 时, $n \rightarrow \infty$,

所以有 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$.

【注】 探索思路过程参见解析视频

第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 求证: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0) = 3$.

【参考证明】: 由麦克劳林公式, 得 $f(x) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$, η 介于 0 和 x 之间, $x \in [-1, 1]$. 分别取 $x = 1, x = -1$, 得

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\eta_1), 0 < \eta_1 < 1.$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\eta_2), -1 < \eta_2 < 0.$$

两式相减, 得 $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$.

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续, 因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2, \eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 从而有 $m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M$.

再由闭区间上连续函数的介值定理, 至少存在一点 $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$, 使得

$$f'''(x_0) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3.$$

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线，线密度为 ρ 。在点 $(0, h)$ 处（其中 $h > 0$ ）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

【参考解答】：在 x 轴的 x 处取一小段 dx ，其质量为 ρdx ，到质点的距离为 $\sqrt{h^2 + x^2}$ ，这一小段与质点的引力是 $dF = \frac{Gm\rho dx}{h^2 + x^2}$ （其中 G 为引力常数），则有

$$\begin{aligned} F_x &= \int_a^{+\infty} dF_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm\rho}{2} \int_a^{+\infty} \frac{d(x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= -Gm\rho (h^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned} F_y &= \int_a^{+\infty} dF_y = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t dt}{h^3 \sec^3 t} \\ &= \frac{Gm\rho}{h} \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{Gm\rho}{h} \left(1 - \sin \arctan \frac{a}{h} \right) \end{aligned}$$

所求引力向量为 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ 。

第五题：(15 分)设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$

【参考解答】：对方程两边分别关于 x, y 求导，

$$\frac{\partial z}{\partial x} F'_u - \frac{1}{x^2} F'_u + \frac{\partial z}{\partial x} F'_v = 0, \quad F'_u \frac{\partial z}{\partial y} + F'_v \frac{\partial z}{\partial y} + F'_v \frac{1}{y^2} = 0$$

由此可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_u}{x^2(F'_u + F'_v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F'_v}{y^2(F'_u + F'_v)}$ ，所以 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ 。对该式

再关于 x, y 求导，有

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

第一个等式乘以 x ，第二个等式乘以 y ，相加借助于第一个等式的结论可得

$$x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$

第六题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续， a, b, c 为常数， Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。记第一型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS$ 。求证： $I = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u\right) du$ 。

【参考证明】：由 Σ 的面积为 4π 。当 a, b, c 都为零时，等式显然成立。当它们不全为 0 时，可知原点到平面 $ax + by + cz + d = 0$ 的距离是 $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

设平面 $P_u : u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 其中 u 固定，则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而 $-1 \leq u \leq 1$ 。两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为 $f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u\right)$ 。这部分摊开可以看成是一个细长条，这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$ ，宽是 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ，它的面积为 $2\pi du$ ，故得证。