

## 2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

### 试卷及参考答案

#### 一、简答下列各题(本题共 5 个小题, 每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ .

【参考答案】: 因为  $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln(n!)}$ , 而

$$\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{1}{n} \left( \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right), \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right) = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$ .

2. 求通过直线  $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0, \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$  的两个相互垂直的平面  $\pi_1, \pi_2$ , 使其中一个平面

过点  $(4, -3, 1)$ .

【参考答案】: 过直线  $L$  的平面束方程为  $\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$ ,

$$\text{即 } (2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + 2\lambda + 3\mu = 0.$$

若平面  $\pi_1$  过点  $(4, -3, 1)$ , 代入得  $\lambda + \mu = 0$ , 即  $\mu = -\lambda$ , 从而  $\pi_1$  的方程为  $3x + 4y - z + 1 = 0$ .

若平面束中的平面  $\pi_2$  与  $\pi_1$  垂直, 则  $3(2\lambda + 5\mu) + 4(\lambda + 5\mu) + 1(3\lambda + 4\mu) = 0$ . 解得  $\lambda = -3\mu$ , 从而平面  $\pi_2$  的方程为  $x - 2y - 5z + 3 = 0$ .

3. 已知函数  $z = u(x, y)e^{ax+by}$ , 且  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ , 确定常数  $a, b$ , 使函数  $z = z(x, y)$  满足

$$\text{方程 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

【参考答案】:  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + au(x, y) \right], \frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + bu(x, y) \right],$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by} \left[ b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu(x, y) \right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = e^{ax+by} \left[ (b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) \right],$$

若是上式等于 0, 只有  $(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) = 0$ , 由此可得  $a = b = 1$ .

4. 设  $u = u(x)$  连续可微,  $u(2) = 1$ , 且  $\int_L (x+2y)u \, dx + (x+u^3)u \, dy$  在右半平面

上与路径无关, 求  $u(x)$ .

【参考答案】: 由  $\frac{\partial [(x+2y)u]}{\partial y} = \frac{\partial [u(x+u^3)]}{\partial x}$ , 得

$$(x + 4u^3)u' = u, \text{ 即 } \frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = 4u^2,$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x = e^{\ln u} \left( \int 4u^2 e^{-\ln u} du + C \right) = u \left( \int 4u du + C \right) = u(2u^2 + C)$$

由  $u(2) = 1$  得  $C = 0$ ，所以  $u = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$ 。

5. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt$ .

【参考答案】：因为当  $x > 1$  时，

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt \right| &\leq \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt \\ &\leq 2\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt = 0$ .

第二题：(10 分) 计算  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$ .

【参考答案】：由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi})$$

$$\text{所以有 } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

$$\text{当 } n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ 时, } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \text{ 由两边夹法则, 得 } \int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

【注】如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

需要先说明  $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$  收敛。

第三题：(10 分) 求方程  $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$  的近似解，精确到 0.001。

【参考解答】：由泰勒公式  $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2$  ( $0 < \theta < 1$ )。令  $t = \frac{1}{x}$  得

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程，得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \text{ 即 } x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right).$$

由此知  $x > 500, 0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$ , 所以有  $|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$ , 即当

$x = 501$  即为满足题设条件的解。

**第四题：(12 分)** 设函数  $y = f(x)$  二阶可导，且  $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$ . 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$ , 其中  $u$  是曲线  $y = f(x)$  上点  $P(x, f(x))$  处切线在  $x$  轴上的截距。

**【参考答案】:**  $y = f(x)$  上点  $P(x, f(x))$  处切线方程为  $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ . 令  $Y = 0$ ,

$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 由此得  $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right] = - \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} \right] = \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0.$$

由  $f(x)$  在  $x = 0$  处的二阶泰勒公式,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{xf'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0) + o(1)}{f'(x) - f'(0)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left( \frac{f''(0)}{2} u^2 + o(u^2) \right)}{u^3 \left( \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} = 2.$$

**第五题：(12 分)** 求最小实数  $C$ , 使得满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续的函数  $f(x)$  都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C.$$

**【参考答案】:** 由于  $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$ , 取  $f_n(x) = (n+1)x^n$ , 则有

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

而  $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty)$ . 因此最小的实数为  $C = 2$ .

**第六题：(12 分)** 设  $f(x)$  为连续函数,  $t > 0$ .  $\Omega$  是由抛物面  $z = x^2 + y^2$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 (t > 0)$  所围成起来的部分. 定义  $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$ ,

求  $F'(t)$ .

【解法一】: 即  $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ , 则  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影为  $x^2 + y^2 \leq g$ . 在曲线

$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$  上任取一点  $(x, y, z)$ , 则圆雕到点的射线和  $z$  轴的夹角为

$$\theta_t = \arccos \frac{z}{t} = \arccos \frac{g}{t}.$$

取  $\Delta t > 0$ , 则  $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$ . 对于固定的  $t > 0$ , 考虑积分差  $F(t+\Delta t) - F(t)$ , 这是一个在厚度为  $\Delta t$  的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和  $z$  轴的夹角在  $\theta_t, \theta_{t+\Delta t}$  之间. 用球坐标计算积分, 由积分的连续性可知, 存在  $\alpha = \alpha(\Delta t)$ ,  $\theta_{t+\Delta t} \leq \alpha \leq \theta_t$  使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin \theta dr$$

即  $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr$ . 当  $\Delta t \rightarrow 0^+$ ,

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \theta_t = \frac{g(t)}{t}, \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \rightarrow t^2 f(t^2).$$

故  $F(t)$  的右导数为

$$2\pi \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right) t^2 f(t^2) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

当  $\Delta t < 0$ , 考虑  $F(t+\Delta t) - F(t)$  可得到同样的左导数, 因此

$$F'(t) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

【解法二】: 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 则区域  $\Omega$  表示为

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r^2 \leq z \leq \sqrt{t^2 - r^2},$$

其中  $a$  满足  $a^2 + a^4 = t^2, a = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ , 有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^a \left[ \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right] r dr$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi \left[ a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2 + z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2 + t^2 - r^2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right]$$

注意到  $\sqrt{t^2 - a^2} = a^2$ , 第一个积分为 0, 所以有

$$F'(t) = 2\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

所以  $F'(t) = \pi t f(t^2) (2t + 1 - \sqrt{1+4t^2})$ .

第七题: (14 分) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数,

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

【参考证明】: (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = 2\delta > \delta > 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $n \geq N$  时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta, \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1}, a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)$$

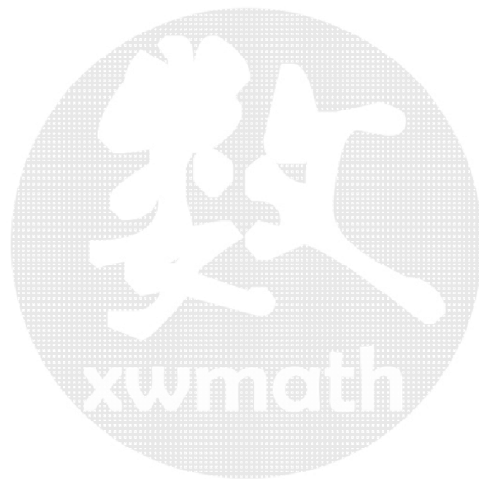
$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N},$$

因而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和有上界, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \delta < 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $n \geq N$  时,  $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$ , 有

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \dots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \dots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1},$$

于是由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 得到  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)