

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

试卷及参考答案

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)。

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$ 。

【参考解答】: 因为 $\sin(\pi \sqrt{1 + 4n^2}) = \sin(\pi \sqrt{1 + 4n^2} - 2n\pi) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}\right)^n \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}\right) \right] = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right] = e^{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的。

【参考证明】: $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$. 只要证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散。

$$\text{因为 } a_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散. 由正项级数的比较判别法可知, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 即 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不绝对收敛。

3. 设 $y = y(x)$ 由 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 所确定, 求 $y(x)$ 的极值。

【参考解答】: 方程两边对 x 求导, 得 $3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x(x+2y)}{2y^2 - x^2}$

令 $y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2y$. 将 $x = 0, x = -2y$ 代入所给方程, 得
 $x = 0, y = -1; x = -2, y = 1$.

$$\begin{aligned} \text{又有 } y'' &= \frac{(2y^2 - x^2)(2x + 2xy' + 2y) + (x^2 + 2xy)(4yy' - 2x)}{(2y^2 - x^2)^2}, \text{ 从而有} \\ y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1 \\ y'=0}} &= -1 < 0, y'' \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=1 \\ y'=0}} = 1 > 0. \end{aligned}$$

所以, $y(0) = -1$ 为极大值, $y(-2) = 1$ 为极小值。

4. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上的点 A 作切线, 使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$. 求点 A 的坐标。

【参考解答】：设切点 A 的坐标为 $(t, \sqrt[3]{t})$ ，曲线过 A 点的切线为 $y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t)$ 。

令 $y = 0$ ，可得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0 = -2t$ 。因此平面图形的面积 $S = \Delta Ax_0t$ 的面积-曲边梯形 OtA 的面积

$$S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{t} \cdot 3t - \int_0^t \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} t \sqrt[3]{t} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 1。$$

所以 A 的坐标为 $(1, 1)$ 。

第二题：(12 分) 计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{【参考解答】: } I &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(\arctan e^{-x} + \arctan e^x \right) \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8}。 \end{aligned}$$

(其中 $\arctan e^{-x} + \arctan e^x = \frac{\pi}{2}$ ，另外

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} du = - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx。$$

这样可以得到第二个 $\frac{\pi}{2}$)

第三题：(12 分) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛。}$$

【参考证明】：由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ，则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0。$$

应用洛必达法则，则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x - 0)} = \frac{1}{2} f''(0)$ 。所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} f''(0)。由于 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛，所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛。}$$

第四题：(10 分) 设 $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ ，证明：

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}.$$

【参考证明】：因为 $f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ ，所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增加，从而有反函数。设 $A = f(a), B = f(b)$ ， φ 是 f 的反函数，则

$$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \leq \frac{1}{m},$$

又 $|f(x)| \leq \pi$ ，则 $-\pi \leq A < B \leq \pi$ ，所以

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \stackrel{x = \varphi(y)}{=} \left| \int_A^B \varphi'(y) \sin y dy \right| \leq \int_0^\pi \frac{\sin y}{m} dy = \frac{2}{m}.$$

第五题：(14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dy dz + (2y^3 - y) dz dx + (3z^3 - z) dx dy.$$

试确定曲面 Σ ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

【参考解答】：设 Σ 围成的立体的体积为 V ，则由高斯公式，有

$$I = \iiint_V (3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3) dV = 3 \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) dV$$

为了使得 I 达到最小，就是要求 V 使得 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \leq 0$ 的最大空间区域，即

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$$

所以 V 是一个椭球， Σ 是椭球 V 的表面时，积分 I 最小。

$$\text{为了求该最小值，做变换 } x = u, y = v / \sqrt{2}, z = w / \sqrt{3}, \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} (u^2 + v^2 + w^2 - 1) dV \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r^2 \sin \theta dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15} \pi. \end{aligned}$$

第六题：(14 分) 设 $I_a(r) = \int_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^a}$ ，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆

$$x^2 + xy + y^2 = r^2, \text{ 取正向。求极限 } \lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r).$$

【参考解答】：作变换 $x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}, y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ 。曲线 C 变为 uOv 平面上的

$$\Gamma: \frac{3}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 = r^2, \text{ 也是取正向且有 } x^2 + y^2 = u^2 + v^2, y dx - x dy = v du - u dv,$$

$$I_a(r) = \int_{\Gamma} \frac{v du - u dv}{(u^2 + v^2)^a}.$$

作变换 $u = \sqrt{\frac{2}{3}}r \cos \theta, v = \sqrt{2}r \sin \theta$, 则有 $vdu - u dv = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^2 d\theta$

$$I_a(r) = -\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta\right)^a} = -\frac{2r^2}{\sqrt{3}} J_a$$

其中 $J_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta\right)^a}, 0 < J_a < +\infty$.

因此当 $a > 1$ 和 $a < 1$, 所求极限分别为 0 和 $-\infty$ 。当 $a = 1$,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta} = \sqrt{3}\pi.$$

所求极限为 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r) = \begin{cases} 0, a > 1, \\ -\infty, a < 1, \\ -2\pi, a = 1. \end{cases}$

第七题: (14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和。

【参考解答】: (1) 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n = 1, 2, \cdots$.

因为 n 充分大时

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}$$

所以 $u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{3/2}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} (k = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right) = \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} \right) + \left(\frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-1}}{n+1} \right) + \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} (a_2 - a_1) + \frac{1}{4} (a_3 - a_2) + \cdots + \frac{1}{n+1} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+2} a_n \\ &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \right) - \frac{1}{n+2} a_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} a_n. \end{aligned}$$

因为 $0 < a_n < 1 + \ln n$, 所以 $0 < \frac{a_n}{n+2} < \frac{1 + \ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{n+2} = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 0. \text{ 于是 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - 0 - 0 = 1.$$