

2014年全国大学生数学竞赛预赛试题参考答案

一 填空题(共有5小题, 每小题6分, 共30分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是_____.

答案: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

[参考解答] 由题设知该方程的特征方程有二重根 $r=1$, 故所求微分方程是 $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$.

公众号: 竞赛资料网

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $L: 2x + 2y + z = 0$, 则与 L 平行的 S 的切平面方程是_____.

答案: $2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0$

[参考解答] 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 S 上一点, 则 S 在 P_0 的切平面方程是

$$-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

由于该切平面与已知平面 L 平行, 则 $(-2x_0, -4y_0, 1)$ 平行于 $(2, 2, 1)$, 故存在常数 $k \neq 0$ 使得

$(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$, 从而 $k = 1$. 故得 $x_0 = -1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$, 这样就有 $z_0 = \frac{3}{2}$. 所求切面方程是

$$2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0.$$

(3) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$ 所确定, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ _____.

答案: $y' = 3$

[参考解答] 易知在 $y(0) = 1$. 对方程的两边关于 x 求导, 得 $1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)$, 于是

$y' = \csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right) + 1$, 把 $x=0$ 代入上式, 得 $y' = 3$.

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

公众号: 竞赛资料网

答案: 1

[参考解答] $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1.$$

(5) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ _____.

答案: 2

[参考解答] 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3$, 于是有 $\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3 + \alpha$,

其中 $\alpha \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 即有 $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

二 (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| dx$.

[参考解答与评分标准]

$$I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos(\ln x) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin \ln x| \frac{1}{x} dx. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \ln x = u, \text{ 则有 } I = \int_{-2n\pi}^0 |\sin u| du = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt = 4n \int_0^{\pi/2} |\sin t| dt = 4n. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

三 (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且有正常数 A, B 使得 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$. 证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$.

[参考解答与评分标准] 由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(0-x)^2, \xi \in (0, x), \\ f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2, \eta \in (x, 1), \end{aligned} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

上述两式相减, 得到 $f(0) - f(1) = -f'(x) - \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2$, 于是

$$f'(x) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

由条件 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$, 得到

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2} \left((1-x)^2 + x^2 \right). \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

因 $x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ 在 $[0, 1]$ 的最大值为 1, 故

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}. \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

四 (本题满分 14 分) (1) 设一球缺高为 h , 所在球半径为 R . 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

$\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)} < 1$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)} \right)^n = 0$, 所以 $\exists N, \forall n > N$ 时有

$$\left(\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)} \right)^n < \frac{\varepsilon}{2} = 1 - c. \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

即 $f^n(1-\varepsilon) < f^n(c)(1-c) \leq \int_c^1 f^n(x)dx \leq \int_0^1 f^n(x)dx = f^n(x_n)$, 从而 $1-\varepsilon < x_n$. 由 ε 的任意性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

公众号: 竞赛资料网

再考虑一般情形. 令 $F(t) = f(a + t(b-a))$, 由 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 严格单增知 F 在 $[0, 1]$ 上

非负连续, 严格单增. 从而 $\exists t_n \in [0, 1]$, 使得 $F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t)dt$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$, 即

$$f^n(a + t_n(b-a)) = \int_0^1 f^n(a + t(b-a))dt.$$

记 $x_n = a + t_n(b-a)$, 则有

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + (b-a) = b. \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

六 (本题满分 15 分) 设 $A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right)$.

[解] 令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 因 $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2/n^2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})

记 $x_i = \frac{i}{n}$, 则 $A_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx$, 故 $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))dx$. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})

由拉格朗日中值定理, 存在 $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i)dx$. \dots\dots\dots (10 \text{ 分})

记 m_i 和 M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小值和最大值, 则 $m_i \leq f'(\zeta_i) \leq M_i$, 故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i)dx$ 介于 $m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)dx$ 和 $M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)dx$ 之间, 所以存在 $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i)dx = -f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2/2, \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

于是, 有 $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

(2) 设球体 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω . 记球缺上的球冠为 Σ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zxdy.$$

[参考解答与评分标准] (1) 设球缺所在的球体表面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 球缺的中心线为 z 轴, 且设球缺所在圆锥顶角为 2α . 记球缺的区域为 Ω , 则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dv = \int_{R-h}^R dz \iint_{D_z} dxdy = \int_{R-h}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2. \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

由于球面的面积微元是 $dS = R^2 \sin\theta d\theta$, 故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi Rh. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1 , 方向指向球缺外, 且记 $J = \iint_{P_1} xdydz + ydzdx + zxdy$. 由 Gauss 公式, 有

$$I + J = \iiint_{\Omega} 3dv = 3v(\Omega), \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

其中 $v(\Omega)$ 为 Ω 的体积. 由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 故

$$J = \frac{-1}{\sqrt{3}} \iint_{P_1} (x+y+z) dS = \frac{-6}{\sqrt{3}} \sigma(P_1) = -2\sqrt{3}\sigma(P_1),$$

其中 $\sigma(P_1)$ 是 P_1 的面积. 故 $I = 3v(\Omega) - J = 3v(\Omega) + 2\sqrt{3}\sigma(P_1)$. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})

因为球缺底面圆心为 $Q = (2,2,2)$, 而球缺的顶点为 $D = (3,3,3)$, 故球缺的高度 $h = |QD| = \sqrt{3}$. 再由

(1) 所证并代入 $h = \sqrt{3}$ 和 $R = 2\sqrt{3}$ 得

$$I = 3 \cdot \frac{\pi}{3} (3R-h)h^2 + 2\sqrt{3}\pi(2Rh-h^2) = 33\sqrt{3}\pi. \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

五 (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in [a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx$,

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

公众号: 竞赛资料网

证明: 先考虑特殊情形: $a=0, b=1$. 下证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

首先 $x_n \in [0,1]$, 即 $x_n \leq 1$, 只要证明 $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1), \exists N, \forall n > N$ 时, $1-\varepsilon < x_n$. 由 f 在 $[0,1]$

严格单增, 就是要证明 $f^n(1-\varepsilon) < f^n(x_n) = \int_0^1 f^n(x) dx$. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})

由于 $\forall c \in (0,1)$, 有 $\int_c^1 f^n(x) dx > f^n(c)(1-c)$, 现取 $c = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1-\varepsilon) < f(c)$, 即