

## 2015 年第七届预赛（非数学类）参考答案

一、每小题 6 分，共计 30 分。

(1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n^2+n} \right) = \underline{\frac{2}{\pi}}$ 。

解：由于  $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi$ ，而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin x dx = \frac{2}{\pi}。$$

所以所求极限是  $\frac{2}{\pi}$ 。

(2) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  所决定，其中  $F(u, v)$  具有连续偏导

数，且  $xF_u + yF_v \neq 0$ 。则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{z - xy}$ 。（本小题结果要求不显含  $F$  及其偏导数）

解：方程对  $x$  求导，得到  $\left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) F_u + \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\right) F_v = 0$

$$\text{即 } x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_v - x^2 F_u)}{xF_u + yF_v}。$$

同样，方程对  $y$  求导，得到  $y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_u - y^2 F_v)}{xF_u + yF_v}$ 。

$$\text{于是 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(xF_u + yF_v) - xy(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} = z - xy$$

(3) 曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  的切平面与曲面  $z = x^2 + y^2$  所围区域的体积为

$$\underline{\frac{\pi}{2}}。$$

解：曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  的切平面：  $2(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 0$ ，

即  $z = 2x - 2y - 1$ 。联立  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x - 2y - 1 \end{cases}$ ，

得到所围区域的投影  $D$  为：  $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$ 。

所求体积  $V = \iint_D [(2x-2y-1) - (x^2+y^2)] dx dy = \iint_D [1 - (x-1)^2 - (y+1)^2] dx dy$

公众号：竞赛资料网

令  $\begin{cases} x-1 = r \cos t \\ y+1 = r \sin t \end{cases}$ ，  $V = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2}$ 。

(4) 函数  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, 5] \end{cases}$  在  $(-5, 5]$  的傅立叶级数在  $x=0$  收敛的值  $3/2$ 。

解：由傅里叶收敛定理，易知  $f(0)=3/2$ 。

(5) 设区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $u(x)$  定义为  $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ ，则  $u(x)$  的初等函数表达式为

$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ 。

【解】 由于  $u^2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} ds = \iint_{s \geq 0, t \geq 0} e^{-x(s^2+t^2)} ds dt$ ，故有

$$u^2(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4x} \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} d_\rho(x\rho^2) = -\frac{\pi}{4x} e^{-x\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \frac{\pi}{4x}。$$

所以  $u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ 。

二、(12 分) 设  $M$  是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解：显然， $O(0,0,0)$  为  $M$  的顶点， $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  在  $M$  上。由  $A, B, C$  三点决定的平面  $x+y+z=1$  与球面  $x^2+y^2+z^2=1$  的交线  $L$  是  $M$  的准线。-----4 分

设  $P(x,y,z)$  是  $M$  上的点， $(u,v,w)$  是  $M$  的母线  $OP$  与  $L$  的交点，则  $OP$  的方程为  $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{1}{t}$ ，

即  $u=xt, v=yt, w=zt$ 。-----8 分

代入准线方程，得  $\begin{cases} (x+y+z)t = 1 \\ (x^2+y^2+z^2)t^2 = 1 \end{cases}$ 。

消除  $t$ ，得到圆锥面  $M$  的方程  $xy + yz + zx = 0$ 。-----12 分

三、(12分) 设  $f(x)$  在  $(a,b)$  内二次可导, 且存在常数  $\alpha, \beta$ , 使得对于  $\forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则  $f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导。

证明 1. 若  $\beta = 0$ 。

公众号: 竞赛资料网

对于  $\forall x \in (a,b)$ , 有

$$f'(x) = \alpha f(x), \quad f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha^2 f(x), \dots, \quad f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x).$$

从而  $f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导。-----4分

2. 若  $\beta \neq 0$ 。对于  $\forall x \in (a,b)$ , 有

$$f''(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{\beta} = A_1 f'(x) + B_1 f(x), \quad (1)$$

其中  $A_1 = 1/\beta, B_1 = \alpha/\beta$ 。-----6分

因为 (1) 右端可导, 从而

$$f'''(x) = A_1 f''(x) + B_1 f'(x)。-----8分$$

设  $f^{(n)}(x) = A_1 f^{(n-1)}(x) + B_1 f^{(n-2)}(x), n > 1$ , 则  $f^{(n+1)}(x) = A_1 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x)$ 。

故  $f(x)$  任意阶可导。-----12分

四、(14分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域与和函数

$$\text{解: 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + 2}{(n+2)(n^3 + 2)} = 0.$$

固收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ 。-----4分

由

$$\frac{n^3 + 2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \geq 2)$$

及幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域皆为  $(-\infty, +\infty)$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n。$$

-----7 分

用  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$  和  $S_3(x)$  分别表示上式右端三个幂级数的和函数。依据  $e^x$  的展开式得到

$$S_1(x) = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = (x-1)^2 e^{x-1}, \quad S_2(x) = e^{x-1}$$

公众号：竞赛资料网

再由

$$(x-1)S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = e^{x-1} - 1$$

得到, 当  $x \neq 1$  时  $S_3(x) = \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1)$ 。-----10 分

又  $S_3(1) = 1$ 。-----12 分

综合以上讨论, 最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} + \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1), & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{-----14 分}$$

五、(16 分) 设函数  $f$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 1$ 。试证:

(1)  $\exists x_0 \in [0,1]$  使  $|f(x_0)| > 4$

(2)  $\exists x_1 \in [0,1]$  使  $|f(x_1)| = 4$

证明: (1) 若  $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq 4$ , 则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx \leq 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1 \quad \text{-----4 分}$$

因此  $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx = 1$ 。而  $4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1$ ,

公众号：竞赛资料网

$$\text{故 } \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|) dx = 0, \quad \text{-----8 分}$$

所以对于任意的  $x \in [0,1]$ ,  $|f(x)| = 4$ , 由连续性知  $f(x) \equiv 4$  或  $f(x) \equiv -4$ 。

这就与条件  $\int_0^1 f(x)dx = 0$  矛盾。

故  $\exists x_0 \in [0,1]$ , 使  $|f(x_0)| > 4$  -----10 分

(2) 先证  $\exists x_2 \in [0,1]$ , 使  $|f(x_2)| < 4$ 。若不然, 对任何  $x \in [0,1]$ ,  $|f(x)| \geq 4$  成立。则,  $f(x) \geq 4$  恒成立, 或者  $f(x) \leq -4$  恒成立, 与  $\int_0^1 f(x)dx = 0$  矛盾。再由  $f(x)$  的连续性, 及 (1) 的结果, 利用介值定理  $\exists x_1 \in [0,1]$  使  $|f(x_1)| = 4$ 。-----16 分

六、(16 分) 设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续的二阶偏导数,  $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 。若  $f(0,0) = 0$ ,  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ , 证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}。$$

证明: 在点  $(0,0)$  展开  $f(x, y)$  得

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\theta x, \theta y) = \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y),$$

其中  $\theta \in (0,1)$ 。

记  $(u, v, w) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y)$ , 则

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (ux^2 + 2vxy + wy^2)。$$

由于  $\|(u, \sqrt{2}v, w)\| = \sqrt{u^2 + 2v^2 + w^2} \leq \sqrt{M}$  以及  $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$ , 我们有

$$|(u, \sqrt{2}v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \leq \sqrt{M} (x^2 + y^2),$$

即

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{M} (x^2 + y^2)。$$
-----13 分

从而

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi \sqrt{M}}{4}。$$
-----16 分