

# 第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

(非数学类, 2016 年 10 月)

绝密 ★ 启用前

(14 金融工程-白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一 (填空题, 本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

1. 若  $f(x)$  在点  $x = a$  可导, 且  $f(a) \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$

解

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a) + f'(a)\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

2. 若  $f(1) = 0$ ,  $f'(1)$  存在, 则极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \times 3x}{x^2 \times x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \right) \\ &= 3f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{3}{2}f'(1) \end{aligned}$$

3. 设  $f(x)$  有连续导数, 且  $f(1) = 2$ . 记  $z = f(e^x y^2)$ , 若  $\frac{\partial z}{\partial x} = z$ , 则当  $x > 0$ ,  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

解 由题设得  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x y^2) e^x y = f(e^x y^2)$ , 令  $u = e^x y^2$ ,

得到当  $u > 0$  有  $f'(u)u = f(u)$ , 即  $\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u}$ , 从而  $(\ln f(u))' = (\ln u)'$

所以有  $\ln f(u) = \ln u + C_1$ ,  $f(u) = Cu$ . 再而由初始条件得  $f(u) = 2u$

故当  $x > 0$  有  $f(x) = 2x$

4. 设  $f(x) = e^x \sin 2x$ , 则  $f^{(4)}(0) =$  \_\_\_\_\_

解 由 Taylor 展开式得

$$f(x) = \left[ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right] \left[ 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4) \right]$$

所以  $f(x)$  展开式的 4 次项  $\frac{-1}{3!}(2x)^3 \times x + \frac{1}{3!}x^3 \times (2x) = -x^4$ , 从而  $\frac{f^{(4)}(x)}{4!} = 1$ ,

故  $f^{(4)}(0) = 24$

5. 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2$  平行于平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程为 \_\_\_\_\_

解 该曲面在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的切平面的法向量为  $(x_0, 2y_0, -1)$ . 又该切平面于已知平面平行, 从而两平面法向量平行, 故  $\frac{x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{-1}{-1}$

从而  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 1$ , 得  $z_0 = \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 3$ , 从而所求切平面为

$$2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0$$

即

$$2x + 2y - z = 3$$

二 (本题满分 14 分)

设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  可导,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \in (0, 1)$ ,  $0 < f'(x) < 1$ .

试证当  $a \in (0, 1)$ ,  $\left( \int_0^a f(x) dx \right)^2 > \int_0^a f^3(x) dx$ .

证明 设  $F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$ , 则  $F(0) = 0$  且要证明  $F'(x) > 0$

设  $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$ , 则  $F'(x) = f(x)g(x)$

由于  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x) > 0$ ,

从而只要证明  $g(x) > 0$ ,  $x > 0$

而  $g(0) = 0$ , 我们只要证明  $g'(x) > 0$ ,  $0 < x < a$

而  $g'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0$ , 得证

### 三 (本题满分 14 分)

某物体所在的空间区域为  $\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$ ,

密度函数为  $x^2 + y^2 + z^2$ , 求质量

$$M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

**解** 由于  $\Omega: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$ , 是一个椭球

其体积为  $V = \frac{4\pi}{3}\pi$ , 作变换  $u = x - \frac{1}{2}, v = y - \frac{1}{2}, w = \sqrt{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)$

将  $\Omega$  变为单位球  $\Sigma: u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ , 而

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}$$

故  $du dv dw = \sqrt{2} dx dy dz$  且

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left[ \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \right] du dv dw$$

因一次项积分都是 0, 故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left( u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2} \right) du dv dw + A$$

其中  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) V = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

记

$$I = \iiint_{\Sigma} (u^2 + v^2 + w^2) du dv dw = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr = \frac{4\pi}{5}$$

由于  $u^2, v^2, w^2$  在  $\Sigma$  上积分都是  $\frac{I}{3}$ , 故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) I + A = \frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

#### 四 (本题满分 14 分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有连续导数,  $f(0) = 0, f(1) = 1$ .

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2}$$

解  $n$  等分区间  $[0, 1]$ , 分点为  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ .

记  $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ , 则  $x_k = 0 + kh = kh, x_k - x_{k-1} = h, k = 1, 2, \cdots, n$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n h f(x_k) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \cdot (x - x_k) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \left( -\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \right) \quad \eta_k \in (\xi_k, x_k) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-0) \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) h \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (f(1) - f(0)) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

#### 五 (本题满分 14 分)

公众号: 竞赛资料网

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$ .

证明: 在  $(0, 1)$  内存在不同的两点  $x_1, x_2$  使得

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}$$

证明 设  $F(x) = \frac{1}{I} \int_0^x f(t) dt$  则  $F(0) = 0, F(1) = 1$ .

由介值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F(\xi) = \frac{1}{2}$

在两个子区间  $(0, \xi)$ ,  $(\xi, 1)$  分别应用拉格朗日中值定理:

$$F'(x_1) = \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi - 0} = \frac{1/2}{\xi}, \quad x_1 \in (0, \xi)$$

$$F'(x_2) = \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1) - F(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1/2}{1 - \xi}, \quad x_2 \in (\xi, 1)$$

$$\frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} = \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = \frac{\xi}{1/2} + \frac{1 - \xi}{1/2} = 2$$

## 六 (本题满分 14 分)

设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 且

$$f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$$

用 Fourier 级数理论证明  $f(x)$  为常数

**证明** 由  $f(x) = f(x+2)$  知  $f(x)$  为以 2 为周期的周期函数,

其 Fourier 系数分别为:

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

由  $f(x) = f(x+\sqrt{3})$  知

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x+\sqrt{3}) \cos n\pi x \, dx \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi(t-\sqrt{3}) \, dt \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) (\cos n\pi t \cos \sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t \sin \sqrt{3}n\pi) \, dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \sin n\pi t \, dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt \end{aligned}$$

所以  $a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi$

同理可得  $b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi + a_n \sin \sqrt{3}n\pi$

联立

$$\begin{cases} a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi \\ b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi + a_n \sin \sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得  $a_n = b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

而  $f(x)$  可导, 其 Fourier 级数处处收敛于  $f(x)$ , 所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2}$$

其中  $a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx$  为常数

公众号: 竞赛资料网

公众号: 竞赛资料网

公众号: 竞赛资料网