

2017 年数学竞赛预赛（非数学类）试题评分标准及参考答案

一 1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $\cos x f(x) + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x + 1$, 则 $f(x)$

解: 在方程两边求导得

$$f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1, f'(x) + f(x) \tan x = \sec x.$$

公众号: 竞赛资料网

$$\text{从而 } f(x) = e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + c \right)$$

$$= e^{-\ln \cos x} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln \cos x} dx + c \right) = \cos x \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + c \right)$$

$$= \cos x (\tan x + c) = \sin x + c \cos x$$

由于 $f(0) = 1$, 故 $f(x) = \sin x + \cos x$ 。

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right)$

解 由于 $\sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi \right)$

$$= \sin^2 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right) \rightarrow 1.$$

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy, v = x + cy$, 其中 c 为非零常数。则

$$w_{xx} - \frac{1}{c^2} w_{yy} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: $w_x = f_1 + f_2, w_{xx} = f_{11} + 2f_{12} + f_{22},$

$$w_y = c(f_2 - f_1),$$

公众号: 竞赛资料网

$$w_{yy} = c \frac{\partial}{\partial y} (f_2 - f_1) = c (cf_{11} - cf_{12} - cf_{21} + cf_{22}) = c^2 (f_{11} - 2f_{12} + f_{22}).$$

$$\text{所以 } w_{xx} - \frac{1}{c^2} w_{yy} = 4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$

解: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$, 所以 $f(\sin^2 x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$ 。

这样 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4} = 3$ 。

5 不定积分 $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

公众号: 竞赛资料网

解: 由于

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{e^{-\sin x} \sin x \cos x}{(1 - \sin x)^2} dx \stackrel{\sin x = v}{=} 2 \int \frac{ve^{-v}}{(1-v)^2} dv = 2 \int \frac{(v-1+1)e^{-v}}{(1-v)^2} dv \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv + 2 \int \frac{e^{-v}}{(v-1)^2} dv = 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2 \int e^{-v} d \frac{1}{v-1} \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2 \left(e^{-v} \frac{1}{v-1} + \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv \right) = -\frac{2e^{-v}}{v-1} + C = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C. \end{aligned}$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域为 V , 则三重积分

$$\iiint_V z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: 使用球面坐标

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

二 (本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α , 定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha).$$

公众号: 竞赛资料网

若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$. 证明 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值.

解: 由于 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = (f_x, f_y)_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 0$ 对一切 α 成立, 故 $(f_x, f_y)_{(0,0)} = (0, 0)$, 即

$(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点.

-----4 分

记 $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$, 则

$$\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[(f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right]_{(0,0)} = (\cos \alpha, \sin \alpha) H_f(0,0) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} > 0.$$

-----10 分

上式对任何单位向量 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 成立, 故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 f 极小值.

-----14 分

三 (本题满分 14 分) 设曲线 Γ 为在

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I = \int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$

解: 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$,

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 t d(1-t) = -\frac{1}{2}.$$

-----4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ , 方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \right) ydx + zdy + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy.$$

-----8 分

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 zx 面上投影面积为零. 故

$$I + \int_{\Gamma_1} = -\iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线 Γ 在 xy 面上投影的方程为

公众号: 竞赛资料网

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

-----12 分

又该投影 (半个椭圆) 的面积得知 $\iint_{\Sigma} dxdy = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\iint_{\Sigma} dydz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

这样就有 $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

-----14 分

四(本题满分 15 分) 设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$, 则 $\forall a, b (a < b)$, $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}$.

公众号: 竞赛资料网

证. 由于 $\forall a, b (a < b)$, 有

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1.$$

因此

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq b-a.$$

-----4 分

然而

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx = \int_a^b f(x) \left(\int_a^b e^{-|t-x|} dt \right) dx,$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|} dt = \int_a^x e^{t-x} dt + \int_x^b e^{x-t} dt = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) dx \leq b-a \quad \dots\dots(1)$$

-----10 分

即

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \left[\int_a^b e^{a-x} f(x) dx + \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \right].$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x) dx \leq 1, \text{ 和 } \int_a^b f(x) e^{x-b} dx \leq 1. \quad \text{-----13 分}$$

把以上两个式子入(1), 即得结论.

-----15 分

五(本题满分 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda, \text{ 其中 } \lambda \text{ 为常数, 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

证明: 对于 $i = 0, 1, \dots, p-1$, 记 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$. 由题设 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$, 从而

$$\lim_n \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda.$$

-----5 分

而 $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$. 由题设知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}.$$

-----10 分

对正整 m ，设 $m=np+i$ ，其中 $0,1,\dots,p-1$ ，从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。

考虑任何这样的子列，下面极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}。 \quad \text{-----15 分}$$

公众号：竞赛资料网

公众号：竞赛资料网

公众号：竞赛资料网